

Replicando características de ciclos econômicos: um estudo comparativo entre Redes Neurais Artificiais e modelos ARIMA

Eurilton Araújo

Carlos Alexandre F. Gama

Insper Working Paper

WPE: 052/2004



Copyright Insper. Todos os direitos reservados.

É proibida a reprodução parcial ou integral do conteúdo deste documento por qualquer meio de distribuição, digital ou impresso, sem a expressa autorização do Insper ou de seu autor.

A reprodução para fins didáticos é permitida observando-se a citação completa do documento

Replicando características de ciclos econômicos: um estudo comparativo entre Redes Neurais Artificiais e modelos ARIMA.

Eurilton Araújo*
Ibmec São Paulo
euriltona@ibmec.br

Carlos Alexandre F. Gama
Faculdades Ibmec/RJ
Cafgama@hotmail.com

Resumo

Este trabalho avalia a habilidade de duas classes de modelos, Redes Neurais Artificiais (RNA) e ARIMA, em replicar algumas características dos ciclos econômicos, mensuradas a partir da série do PIB real dos países do G7 e da América Latina (Brasil e México). Utilizando a metodologia de caracterização do ciclo econômico proposta por Hess e Iwata (1997), importantes características do ciclo econômico, associadas à série do PIB real de cada país, foram medidas e, posteriormente, comparadas com os resultados obtidos através da simulação do modelo estimado para cada classe. Os resultados gerados mostram que os modelos ARIMA tem boa performance, mas a modelagem via RNA, ainda pouco explorada neste tipo de estudo, pode ser vantajosa, uma vez que certas características do ciclo foram, em média, replicadas com maior precisão.

Palavras-chave: Ciclos Econômicos, Redes Neurais Artificiais e modelos ARIMA

Abstract

This paper evaluates the ability of two classes of models, Artificial Neural Networks (ANN) and ARIMA, in reproducing some business cycle features, based on real GDP series, for the G7 and Latin American countries (Brazil and Mexico). Using the methodology for characterizing business cycles proposed by Hess and Iwata (1997), business cycle features for each country were computed and later compared with the outcomes generated by simulating ARIMA and ANN models. The results indicate that ARIMA models perform well but ANN modeling, still little explored in this type of study, can be advantageous, since it was able to generate, on average, more accurate measures of business cycle features.

Keywords: Business Cycles, Artificial Neural Networks and ARIMA models.

JEL Classification: C22, C45, E32

* Autor para Correspondência. Endereço: Rua Maestro Cardim, 1170. São Paulo-SP. CEP: 01323-001

1. INTRODUÇÃO

O estudo das flutuações das séries econômicas ao redor de sua tendência de longo prazo, fenômeno conhecido como *business cycles*, sempre foi um tema de grande interesse para os economistas. A partir de Burns e Mitchell (1947), que realizaram um estudo extensivo da atividade econômica norte americana, e de Lucas (1977), o interesse por este fenômeno foi renovado. Desde então os pesquisadores tem concentrado seus esforços na obtenção de uma melhor representação estatística dos agregados macroeconômicos, com ênfase especial na série do PIB.

Na modelagem estatística das séries macroeconômicas, o estudo de Nelson e Plosser (1982) abriu novos horizontes ao mostrar de forma teórica e empírica que a maioria das séries dos EUA (inclusive a do PIB) teria uma estrutura temporal univariada bem aproximada por processos lineares autoregressivos com uma raiz unitária, isto é, estas series seriam melhor vistas como realizações de processos estacionários em diferenças, do que realizações de processos estacionários em torno de uma tendência determinística, fazendo com que o modelo de random-walk se tornasse uma referência.

O aumento da eficiência computacional favoreceu grandemente o desenvolvimento e a aplicação de métodos quantitativos não lineares em diversas áreas. Segundo Galvão (2000), nos últimos dez anos o desenvolvimento de modelos não lineares aplicados à caracterização estatística do PIB se intensificou. Além da capacidade de previsão, a habilidade de tais modelos em capturar características de ciclos econômicos passou também a ser estudada. O trabalho de Hess e Iwata (1997) para a série do PIB trimestral americana (1947:1 à 1992:4), testou a habilidade de diversos modelos não lineares de reproduzir importantes características do ciclo econômico, tais como duração, número de expansões e número de contrações, concluindo que o desempenho de tais modelos não é superior ao de um ARIMA (1,1,0).

O resultado obtido por Hess e Iwata não é considerado um consenso. Candelon e Gil-Alana (2001) demonstraram, utilizando a série trimestral do PIB (ajustada sazonalmente) da França, EUA e Reino Unido (de 1961:1 à 2000:1), que modelos ARFIMA (*fractionally* ARIMA) tem um desempenho superior à classe ARIMA. Galvão (2000) mostra que alguns modelos não lineares também podem obter uma performance melhor que um ARIMA (1,1,0) quando utilizamos métricas complementares às utilizadas por Hess e Iwata.

Em outras áreas, a modelagem matemática experimentou grandes avanços e o interesse por antigos paradigmas foi renovado, sendo um deles a modelagem de algumas características do cérebro humano, como reconhecimento de padrões, entendimento de lógica nebulosa e capacidade de inferir em situações com base em experiências passadas (Warner e Misra, 1996). Alguns resultados já haviam sido obtidos em décadas anteriores utilizando como modelo a unidade básica de computação do cérebro humano, o neurônio, entretanto o desenvolvimento intensivo das *redes neurais artificiais (RNA)* recomeçou com Hopfield (1982) e experimentou um grande avanço com o desenvolvimento do método de *backpropagation* para o treinamento de redes *feedforward* multicamadas (*Multi Layer Perceptrons-MLP*).

Desde então as redes neurais passaram a ser utilizadas em diversas áreas sendo que em Economia o seu uso pode ser considerado recente. Um dos trabalhos pioneiros na aplicação das redes neurais na modelagem de séries econômicas foi o de Kuan e White (1994). Nesta pesquisa os autores demonstraram que as séries analisadas no estudo de Nelson e Plosser poderiam ser modeladas via redes neurais. Soni et al. (1995) são os precursores da utilização de redes neurais não só para previsão, mas buscando também captar certas características do ciclo econômico. Estes autores utilizaram a série trimestral do PIB americano (de 1957 até o terceiro trimestre de 1994), para comparar as características de previsão de dois modelos de redes neurais (Feedforward e Elman), às características de

modelos estimados por mínimos quadrados ponderados recursivos (WRLS) e Filtro de Kalman.

O objetivo deste trabalho é utilizar a metodologia de Hess e Iwata (1997) para comparar a classe dos modelos ARIMA à classe das RNA usando como métrica a habilidade associada a cada modelo de reproduzir características do ciclo de negócios compatíveis com as características observadas na série real do PIB, ou seja, procura-se avaliar até que ponto o modelo ARIMA e o modelo RNA são representações estatísticas aceitáveis para o processo gerador dos dados da série do PIB trimestral para um conjunto de países com história e perfil econômico distintos. Neste estudo, procurou-se investigar as séries do PIB trimestral de nove países, sendo dois da América Latina (Brasil e México), dois da América do Norte (Canadá e EUA), cinco da Europa (Alemanha, França, Itália e Reino Unido) e um da Ásia (Japão).

Desta maneira, a principal hipótese a ser testada é a de que um modelo linear da família ARIMA captura de forma mais eficiente características de um ciclo econômico quando comparado com um modelo da classe das redes neurais artificiais.

O trabalho encontra-se organizado em cinco seções adicionais além desta introdução. A caracterização do ciclo econômico é feita na segunda seção. Na terceira seção, são apresentados os modelos econométricos para análise das séries do PIB. A metodologia e os dados utilizados são apresentados na quarta seção. A quinta seção apresenta os resultados e, por fim, a sexta seção discute as conclusões obtidas.

2. CARACTERIZAÇÃO DO CICLO ECONÔMICO E ALGUMAS DEFINIÇÕES

Durante a primeira metade do século passado, muitos trabalhos enfatizaram a busca de uma caracterização empírica dos ciclos econômicos, sendo um dos principais trabalhos deste período o de Burns e Mitchell (1947). Neste trabalho, os autores definem duas características dos ciclos econômicos, a primeira é o co-movimento entre variáveis

econômicas e a segunda é a divisão dos ciclos econômicos em diferentes regimes. A segunda característica, que consiste em tratar expansões e contrações como objetos probabilísticos diferentes é parte essencial da análise empírica feita pelo NBER (Diebold e Rudebush, 1996).

Apesar de existirem uma série de algoritmos capazes de reproduzir aproximadamente as características do ciclo, incluindo a assimetria entre expansão e contração, optamos pelo critério de caracterização proposto por Hess e Iwata(1997), uma vez que, deste modo, os resultados aqui apresentados podem ser comparados diretamente com os obtidos no artigo de Hess e Iwata, pois o método de definição das características do ciclo continuou sendo o mesmo.

No intuito de simplificar as definições de contração e expansão, Hess e Iwata (1997) propõem uma alternativa à metodologia do NBER para caracterizar as fases do ciclo de negócios. Esta metodologia, que será empregada neste trabalho, se fundamenta em alguns conceitos e definições básicas que são apresentados a seguir.

A primeira definição é a de *running peak*, m_t , de uma série temporal $\{y\}_{t=0}^{\infty}$. No tempo t é o máximo corrente da série, definido por: $\{m_t \in \mathbb{R} \mid m_t = (\max_{0 \leq s \leq t} y_s)\}$. Definimos *contração* como todo período em que o valor da série $\{y\}_{t=0}^{\infty}$ se encontra abaixo do *running peak*. A duração de uma contração, h_c , é definida por: $\{h_c \in \mathbb{R} \mid y_s < m_s \forall s \in \{t+1, t+2, t+3, \dots, t+h_c+1\} \text{ e } y_s = m_s \forall s \in \{t, t+h_c+1\}\}$.

A *profundidade* de uma contração iniciada em t e de duração h_c é definida como a máxima diferença de m_s e y_s entre os períodos de tempo t e $t+h$ que podemos representar por $\{d_c \in \mathbb{R} \mid d_c = (\max_{t \leq s \leq t+h} (m_s - y_s) = m_t - \min_{t \leq s \leq t+h} y_s)\}$. Qualquer período que não seja uma contração é chamada uma *expansão*, sendo que para qualquer ponto em uma expansão $y_t = m_t$. A duração de uma determinada expansão será igual a h_e definida por

$\{h_e \in \mathbb{R} \mid y_s = m_s \forall s \in \{t+1, t+2, t+3, \dots, t+h_e+1\} \text{ e } y_s < m_s \forall s \in \{t, t+h_e+1\}\}$. A *altura* da expansão iniciada em t e de duração h_e é definida como a máxima diferença entre os *running peaks* entre o início e o final da expansão, ou $\{a_e \in \mathbb{R} \mid a_e = (m_{t+h} - m_t) = (y_{t+h} - m_t)\}$. Os conceitos estão ilustrados na figura 1.

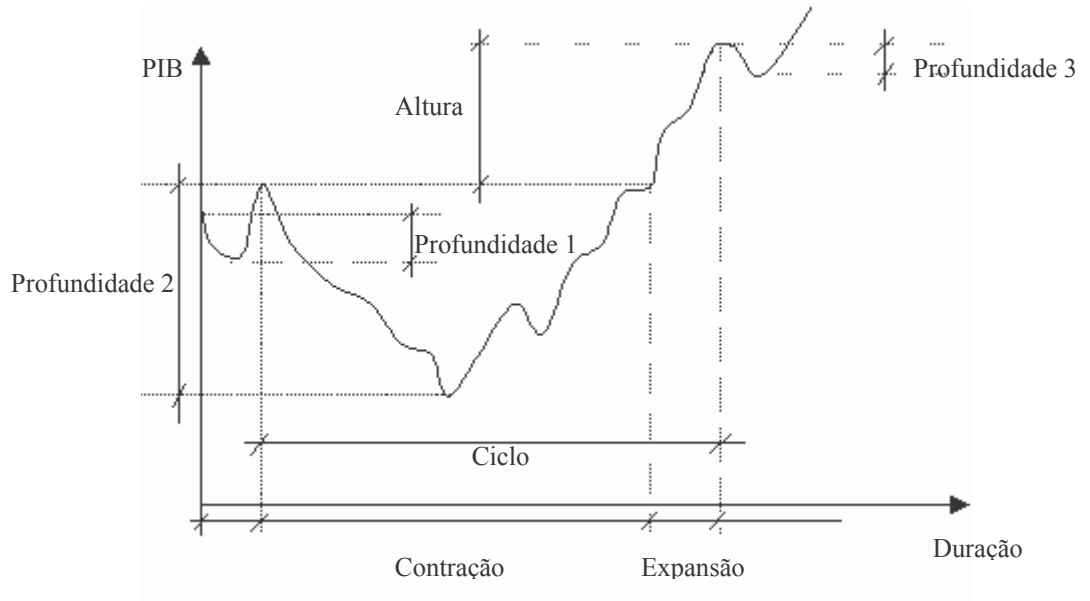


Figura 1: Caracterização do Ciclo Econômico

3. MODELOS PARA ANÁLISE DAS SÉRIES DE PIB

Serão utilizados duas classes de modelos capazes de representar o processo gerador dos dados para as séries do PIB trimestral. Uma é a dos modelos ARIMA, que tem obtido um bom desempenho na captura das características do ciclo econômico do PIB trimestral americano (Hess e Iwata, 1997) e a outra é a das Redes Neurais Artificiais.

3.1. MODELOS ARIMA

A metodologia ARMA (*Autoregressive Moving Average*) desenvolvida por Box e Jenkins (1976), é bastante utilizada em Economia, descreve uma série temporal $\{x_t\}$ como:

$$x_t = \sum_{m=1}^M \varphi_m x_{t-m} + \sum_{n=0}^N \theta_n \varepsilon_{t-n}$$

onde φ_m é o coeficiente da parte AR (autoregressiva), θ_n é o coeficiente da parte MA (média móvel) e $\{\varepsilon_t\}$ são ruídos brancos. Introduzindo o operador translação para o passado, definido como $B^m Z_t = Z_{t-m}$, podemos reescrever a equação acima como:

$$\varphi(B)x_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

Os modelos AR (p), MA(q) e ARMA (p,q), onde os parâmetros indicam a ordem do modelo, são apropriados para descrever séries estacionárias, isto é, séries que evoluem no tempo ao redor de uma média constante. Na prática, muitas séries não são estacionárias, ou seja, possuem tendências (determinística ou estocásticas) que devem ser removidas. Uma forma de remover a tendência de uma série é diferenciá-la, sendo assim, definimos o operador diferença como: $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (1 - B)Z_t$ ¹.

Se $w_t = \Delta^d x_t$ é estacionária, pode ser representada por um processo ARMA (p,q), ou seja:

$$\varphi(B)w_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

Como w_t é uma diferença de x_t , este último é uma integral de w_t . Escrevendo o modelo completo:

$$\varphi(B)\Delta^d x_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

que passa a ser chamado de modelo autoregressivo integrado de médias móveis, ARIMA (p, d, q).

3.2. AS REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

As redes neurais são máquinas de aprendizagem inspiradas nos neurônios que compõem o sistema nervoso humano (Haykin, 1994). Dado um conjunto finito de

¹ A Diferenciação é utilizada para a remoção da tendência estocástica de uma série temporal. O tipo de tendência da série tem fortes implicações na transformação que deverá ser utilizada, para maiores detalhes

observações, as redes neurais possuem a habilidade de “aprender” informações deste conjunto e generalizar seu conhecimento.

3.2.1. MULTI LAYER PERCEPTRONS (MLP)

Um perceptron calcula a combinação linear dos dados de entrada de uma rede e os submete a uma função de ativação (linear ou não) produzindo uma saída. Um perceptron de múltiplas camadas (MLP), pode ser definido como um modelo não linear que aproxima as realizações de um processo estocástico por uma função $G : X \times \Psi \rightarrow \mathfrak{R}$ onde $X \subset \mathfrak{R}^n$ e Ψ é um subconjunto compacto de dimensão finita de \mathfrak{R}^p , sendo p o número de pesos da rede. Estas definições são atendidas pela especificação de uma rede com uma única camada oculta de neurônios (White e Racine, 2000):

$$y_t = G(x, \psi) + \varepsilon_t = \alpha_0 + \sum_{h=1}^H \alpha_h F\left(\gamma_0 + \sum_{i=1}^I \gamma_{hi} x_i\right) + \varepsilon_t$$

onde $(x, \psi) \in X \times \Psi$ sendo $x = [x_1, x_2, \dots, x_I]$ vetores de variáveis independentes e ψ o vetor de parâmetros $\psi = [\alpha', \gamma']$, composto pelos vetores de pesos da camada de saída e da camada oculta respectivamente. Os parâmetros α_0 e γ_0 são respectivamente o *bias* para a camada de saída (intercepto) e o *bias* para a camada oculta. A aplicação $F(x, \psi) \rightarrow \mathfrak{R}$ contínua para todo $x \in X$, chamada função de ativação é a função logística:

$$F(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$$

Os MLP são modelos não lineares que para um dado número de neurônios na camada oculta e um tamanho suficiente da amostra podem aproximar qualquer função com qualquer grau de precisão, em outras palavras, um MLP é um aproximador universal (Cybenko, 1989). As RNA segundo Sarle (1994), são extremamente úteis pois podem

variar sua complexidade, representando desde modelos paramétricos simples (como regressão polinomial) até modelos não paramétricos extremamente flexíveis (como *kernel regression* e *smoothing splines*).

3.2.2. APRENDIZAGEM DE REDES E REGULARIZAÇÃO BAYESIANA

O aprendizado ou treinamento de uma rede neural tem tipicamente por objetivo reduzir a soma do quadrado dos erros (Foresee e Hagan, 1997) :

$$\hat{\psi} = \arg \min_{\psi} Q_1(\psi) = \arg \min_{\psi} \sum_{t=1}^N (y_t - G(x, \psi))^2$$

O processo de modelagem de uma rede neural passa por dois estágios descritos em Medeiros e Pedreira (2001). O primeiro é determinar o vetor x e as defasagens de y_t . O segundo é relacionado à especificação do número de neurônios na camada oculta.

Assim como outros modelos flexíveis não lineares, as RNA, podem sofrer de *overfitting*. Este problema ocorre quando utilizamos um número excessivo de neurônios na camada oculta, que levarão a uma perda na capacidade de generalização (previsão fora da amostra de estimação). Em contrapartida, se reduzirmos o número de neurônios em excesso, teremos perda na capacidade de aproximar o processo gerador dos dados (Medeiros e Pedreira, 2001).

Atualmente, diversas metodologias são utilizadas para solucionar o problema do *overfitting* (Haykin, 1994; Medeiros e Pedreira, 2001). Neste estudo utilizaremos o procedimento desenvolvido por MacKay (1992) chamado *Regularização Bayesiana*, que consiste em adicionar um termo de penalização (regularização) à função objetivo, de forma que o algoritmo de estimação faça com que parâmetros irrelevantes convirjam para zero, reduzindo assim o número de parâmetros efetivos utilizados no processo (procedimento conhecido como “poda”, veja Haykin, 1994).

Seguindo a notação utilizada por Medeiros e Pedreira (2001), o problema de estimação passa a ser definido como:

$$\hat{\psi} = \arg \min_{\psi} Q_T(\psi) = \arg \min_{\psi} \sum_{t=1}^N \left(\eta Q_1(\psi) + \phi Q_2(\psi) \right)^2$$

onde a função de penalização é a soma do quadrado dos parâmetros:

$$Q_2(\psi) = \sum_{h=0}^H \alpha_h^2 + \sum_{h=0}^H \sum_{i=0}^I \gamma_{hi}^2$$

O problema de regularização é otimizar a função objetivo de forma a encontrar valores para os parâmetros ϕ e η . Este problema de otimização requer o cálculo da matriz Hessiana como pode ser visto em MacKay (1992). O algoritmo desenvolvido por Foresee e Hagan (1997) propõe a aproximação da matriz Hessiana pelo algoritmo de Levenberg-Marquardt, reduzindo o custo computacional.

A aproximação é feita utilizando os seguintes passos (Foresee e Hagan, 1997):

- [1] Faça $\phi = 0$, $\eta = 1$ e utilize o método de Nguyen-Widrow para inicializar os parâmetros;
- [2] Faça uma estimativa (um passo) do algoritmo Levenberg-Marquardt minimizando $Q_1(\psi)$;
- [3] Calcule o número efetivo de parâmetros $\hat{\delta} = \dim(\psi) - 2\eta \cdot \text{tr}(\hat{H})^{-1}$ onde \hat{H} é a aproximação da matriz Hessiana feita pelo algoritmo de Levenberg-Marquardt:
 $\hat{H} = \nabla^2 Q_T(\psi) \approx 2\eta J^T J + 2\phi I_N$ onde J é a matriz Jacobiana dos erros;
- [4] Calcule as novas estimativas para ϕ e η , $\hat{\eta} = \frac{T - \hat{\delta}}{2Q_1(\psi)}$ e $\hat{\phi} = \frac{\hat{\delta}}{2Q_2(\psi)}$, onde T é o número de observações;
- [5] Repita os passos de [2], [3] e [4] até a convergência.

4. METODOLOGIA

A capacidade das classes ARIMA e RNA de reproduzir as características do PIB real foram avaliadas utilizando o algoritmo proposto por Hess e Iwata (1997). Desta forma, foram estimados modelos das duas classes para os países do G7 e para dois países da América Latina (Brasil e México). Os dados, a estratégia de modelagem e os critérios de avaliação dos modelos são discutidos com mais detalhes nas próximas seções.

4.1 BASE DE DADOS

Todos os dados de PIB real dos países alvo deste estudo estão disponíveis na base de dados do IPEA², são séries de números índices, com exceção da série do PIB real da França (medido a preços de 1995) e dos EUA (em valores de 1996). A tabela 1 apresenta as séries que foram utilizadas .

Tabela 1: Séries do PIB Real

Países	Frequência da Série (Trimestres)	Fonte
<i>Alemanha</i>	<i>1960Q1:2002Q3</i>	<i>ipeadata</i>
<i>Canada</i>	<i>1957Q1:2002Q4</i>	<i>ipeadata</i>
<i>Estados Unidos</i>	<i>1947Q1:2002Q4</i>	<i>FRED-FED St.Louis</i>
<i>França</i>	<i>1978Q1:2002Q4</i>	<i>EconStats</i> ³
<i>Itália</i>	<i>1960Q1:2002Q3</i>	<i>ipeadata</i>
<i>Japão</i>	<i>1980Q1:2002Q3</i>	<i>ipeadata</i>
<i>Reino Unido</i>	<i>1957Q1:2002Q4</i>	<i>ipeadata</i>
<i>Brasil</i>	<i>1980Q1:2001Q4</i>	<i>ipeadata</i>
<i>México</i>	<i>1980Q1:2002Q3</i>	<i>ipeadata</i>

² www.ipeadata.br

³ www.econstats.com

4.2 ESTRATÉGIAS DE MODELAGEM

A estimação dos modelos ARIMA foi feita com base na metodologia proposta por Box e Jenkins (Box e Jenkins, 1976 e Enders, 1995), que busca representar a parte estacionária do processo estocástico gerador da série temporal a partir de um modelo ARMA. A estratégia de modelagem consistiu em diferenciar as séries⁴, identificando o coeficiente d do modelo ARIMA (p,d,q), para em seguida identificarmos e estimarmos os coeficientes de um modelo ARMA (p,q) através da análise das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial. Sempre que a análise indicava que o modelo era inadequado, o ciclo de modelagem era reiniciado. As especificações propostas para a classe ARIMA dos países podem ser encontradas no Anexo I e Anexo II.

Para o processo de modelagem de uma RNA é usual escolher a defasagem da série e o número de neurônios na camada oculta da rede de modo que a rede reproduza satisfatoriamente características da série temporal em questão (como exemplo veja Haykin, 1994). Recentemente Medeiros e Teräsvirta (2001) desenvolveram uma metodologia que incorpora aspectos estatísticos à modelagem das Redes Neurais. Esta abordagem pode futuramente se tornar padrão na modelagem desta classe de modelos flexíveis, todavia a estratégia de parametrização adotada neste trabalho ainda é a mais usada.

A classe das RNA foi estimada através do procedimento de treinamento da rede por Regularização Bayesiana, utilizando o algoritmo proposto por Foresee e Hagan (1997) que busca minimizar o problema do *overfitting*. Os parâmetros da rede foram ajustados partindo-se do modelo mais parcimonioso com o número de defasagens $L = 4$ e o número de neurônios da camada oculta $N = 3$, aumentando paulatinamente o número de neurônios e defasagens caso a nova especificação fosse capaz de reduzir o erro quadrático médio

⁴ Foram realizados testes (ADF e Phillips-Perron) que confirmaram a hipótese de raiz unitária nas séries analisadas, logo $d=1$.

entre a série de PIB real e àquela gerada pela rede neural. Procurou-se minimizar o aspecto arbitrário da especificação do número de defasagens e do número de neurônios na camada oculta, limitando-se o espaço de busca dos parâmetros⁵. Sendo L o número de defasagens e N o número de neurônios da camada oculta, a região de busca foi definida como $L \in \{4,8\}$ e $N \in \{3,4,6,9\}$.

Com exceção do México e da Itália, o modelo de redes com 4 lags de entrada e 6 neurônios obteve uma boa performance nos demais países. No caso da Itália, devido à presença de dois *outliers* na série se fez necessária a passagem de informações adicionais à rede. Assim, além das quatro defasagens usuais da série do PIB, a rede foi alimentada com variáveis *dummies* associadas aos dois *outliers* encontrados. Para o caso do México, passou-se mais quatro trimestres de informação ao modelo.

4.3 AVALIAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO CICLO

Buscando avaliar se os modelos estimados são capazes de reproduzir as características do ciclo econômico do país em questão foram geradas 5000 amostras de mesmo tamanho da série original através da simulação do modelo via *bootstrap*. Ou seja, tomamos como processo gerador de dados, o ARIMA e a Rede Neural estimada a partir dos dados reais. Desse modo, podemos definir resíduos associados às estimações do ARIMA e da Rede. A partir da distribuição empírica destes resíduos e dado os parâmetros estimados, obtemos séries artificiais associadas ao processo ARIMA e à Rede.

Cada amostra, associada ao ARIMA ou à Rede, teve suas medidas de ciclo calculadas e armazenadas para que suas médias fossem comparadas com os resultados da série do PIB real. Os resultados obtidos estão na tabela 2.

⁵ Como exemplo deste procedimento veja Swanson e White (1997).

Para comparar a função densidade de probabilidade (fdp) das características de ciclo geradas pelo modelo com a fdp advinda dos dados, utilizou-se o procedimento proposto por Galvão (2000), que consiste em calcular a probabilidade da característica simulada (\hat{B}_i) ser maior que a probabilidade da característica da série (B_i)

$$p = P(\hat{B}_i > B_i)$$

Quando utilizamos este procedimento, a capacidade do modelo de reproduzir acuradamente as características do ciclo econômico é rejeitada quando $p < 0.1$ e $p > 0.9$, o que corresponde a um nível de confiança de 80%.

Um teste de distância entre as características também foi empregado, através do cálculo da estatística Q (Hess e Iwata, 1997 e Galvão, 2000)

$$Q = (\hat{B} - B)^T \hat{V}_B^{-1} (\hat{B} - B)$$

onde \hat{V}_B é a matriz de covariância. Assumindo a normalidade assintótica de \hat{B} , a estatística Q é aproximadamente $\chi^2(n)$ onde n é o número de características consideradas no vetor B . A tabela 3 apresenta os resultados obtidos para o teste conjunto das características de expansão, contração, contração e expansão (em conjunto) e todas as características.

Tabela 2: Resultados das Características

		Expansões		Contrações		Numero de Ciclos
		Tamanho (%)	Duração(Q)	Profundidade(%)	Duração (Q)	
Alemanha						
PIB Real	107.00	4.56	3.89	1.24	2.33	27.00
ARIMA	95.91 (0.21) (14.49)	4.42 (0.39) (0.011)	3.45 (0.24) (0.69)	1.20 (0.38) (0.0032)	2.84 (0.68) (1.01)	28.04 (0.55) (4.62)
RNA	101.22 (0.22) (8.01)	4.80 (0.56) (0.0086)	3.87 (0.43) (0.65)	1.35 (0.61) (0.0027)	2.73 (0.74) (0.57)	26.40 (0.38) (3.92)
Canada						
PIB Real	144.00	10.98	9.53	1.00	2.67	15.00
ARIMA	143.41 (0.49) (10.36)	9.33 (0.22) (0.027)	8.05 (0.19) (1.98)	0.69 (0.069) (0.0020)	2.20 (0.17) (0.55)	18.45 (0.80) (3.43)
RNA	137.44 (0.27) (10.80)	9.94 (0.28) (0.026)	8.24 (0.21) (1.92)	0.90 (0.31) (0.0028)	2.71 (0.44) (0.78)	17.21 (0.70) (3.20)
Estados Unidos						
PIB Real	170.00	9.28	8.45	1.29	2.84	20.00
ARIMA	162.08 (0.27) (13.03)	8.54 (0.30) (0.020)	7.46 (0.22) (1.55)	1.11 (0.22) (0.0026)	2.91 (0.48) (0.65)	22.22 (0.69) (3.39)
RNA	161.97 (0.22) (10.80)	9.02 (0.39) (0.019)	7.91 (0.31) (1.53)	1.17 (0.29) (0.0029)	3.11 (0.61) (0.71)	20.92 (0.55) (3.31)
França						
PIB Real	79.00	3.92	6.00	0.32	1.73	13.00
ARIMA	78.85 (0.54) (10.54)	6.09 (0.74) (0.035)	9.32 (0.80) (4.47)	0.38 (0.49) (0.0028)	2.60 (0.66) (2.01)	9.52 (0.096) (2.95)
RNA	79.09 (0.50) (6.88)	5.87 (0.80) (0.029)	8.87 (0.83) (3.78)	0.44 (0.57) (0.0037)	2.45 (0.71) (1.30)	9.77 (0.098) (2.78)
Itália						
PIB Real	129.00	12.38	9.14	1.22	3.23	14.00
ARIMA	121.52 (0.27) (12.27)	11.38 (0.30) (0.029)	7.90 (0.21) (1.93)	1.09 (0.32) (0.0037)	3.34 (0.48) (0.94)	15.83 (0.67) (2.79)
RNA	117.98 (0.068) (7.88)	11.75 (0.33) (0.028)	7.98 (0.21) (1.77)	1.20 (0.40) (0.0040)	3.72 (0.62) (1.14)	15.27 (0.59) (3.07)
Japão						
PIB Real	59.00	5.20	5.27	0.82	2.91	11.00
ARIMA	59.24 (0.49) (6.70)	5.06 (0.36) (0.017)	5.23 (0.38) (1.55)	0.93 (0.57) (0.0035)	3.04 (0.40) (1.53)	11.82 (0.55) (2.86)
RNA	58.94 (0.44) (4.60)	5.35 (0.45) (0.015)	5.53 (0.48) (1.51)	0.91 (0.58) (0.0027)	3.14 (0.49) (1.11)	11.08 (0.43) (2.58)
Reino Unido						
PIB Real	121.00	5.28	5.71	1.16	3.15	21.00
ARIMA	119.63 (0.43) (9.61)	4.21 (0.079) (0.0072)	4.48 (0.060) (0.74)	1.01 (0.20) (0.0019)	2.49 (0.092) (0.49)	26.93 (0.94) (3.52)
RNA	115.16 (0.29) (11.28)	4.61 (0.23) (0.011)	4.86 (0.17) (0.95)	1.09 (0.34) (0.0024)	3.00 (0.34) (0.75)	24.07 (0.75) (3.81)
Brasil						
PIB Real	21.00	3.82	1.54	7.01	5.15	13.00
ARIMA	19.78 (0.42) (7.29)	4.44 (0.73) (0.0097)	1.55 (0.51) (0.23)	9.30 (0.78) (0.049)	8.60 (0.58) (11.50)	11.92 (0.39) (4.05)
RNA	21.03 (0.46) (4.28)	4.10 (0.62) (0.0070)	1.52 (0.40) (0.24)	7.86 (0.65) (0.018)	5.43 (0.46) (2.01)	13.21 (0.47) (2.51)

O valor ao lado de cada característica corresponde a probabilidade $P = (\hat{B}_i > B)$ e o valor abaixo de cada característica, ao desvio padrão.

Tabela 3: p-valor da Estatística Q .

	Features			
	Todas	Contração e Expansão	Contração	Expansão
<i>Alemanha</i>				
ARIMA	0.7232	0.5868	0.5436	0.5084
RNA	0.9645	0.9532	0.7696	0.8330
<i>Canadá</i>				
ARIMA	0.6251	0.4343	0.2075	0.6907
RNA	0.8965	0.7680	0.8030	0.4926
<i>Estados Unidos</i>				
ARIMA	0.7064	0.5086	0.3407	0.5591
RNA	0.8113	0.6906	0.4171	0.7532
<i>França</i>				
ARIMA	0.8803	0.8787	0.8410	0.6385
RNA	0.9397	0.9247	0.8414	0.7031
<i>Itália</i>				
ARIMA	0.8501	0.6985	0.7054	0.4765
RNA	0.6675	0.5302	0.7069	0.2609
<i>Japão</i>				
ARIMA	0.9915	0.9928	0.9139	0.9796
RNA	0.9898	0.9661	0.9456	0.9656
<i>Reino Unido</i>				
ARIMA	0.3669	0.3478	0.3437	0.2489
RNA	0.9681	0.8877	0.9590	0.5827
<i>Brasil</i>				
ARIMA	0.9914	0.9395	0.8458	0.7972
RNA	0.9713	0.9713	0.8795	0.8730
<i>México</i>				
ARIMA	0.9763	0.9092	0.9936	0.6265
RNA	0.8938	0.8290	0.9833	0.5188

O teste de expansão corresponde ao teste conjunto das características *duração* e *altura* da expansão.

O teste de contração corresponde ao teste conjunto das características *duração* e *profundidade* da contração.

O teste de contração e expansão testa conjuntamente as quatro características descritas nos testes de contração e expansão.

5. RESULTADOS

5.1 POR CARACTERÍSTICAS DO CICLO

(a) Picos

Em média, os modelos ARIMA aproximam melhor esta característica (Canadá, Estados Unidos, Itália, Reino Unido, México). O intervalo de confiança para a Itália fez com que o valor da característica para o modelo RNA fosse rejeitado.

(b) Tamanho da Expansão

Na média, as Redes aproximam melhor esta característica (Canadá, EUA, França, Itália, Reino Unido). Nos países em que apresenta melhor desempenho, a Rede só possui menor precisão no Reino Unido. No caso dos países da América Latina, a Rede não consegue reproduzir bem esta característica. O intervalo de confiança para o Reino Unido fez com que o resultado do modelo ARIMA fosse rejeitado.

(c) Duração da Expansão

Para os países do G7, as redes captaram melhor esta característica (em média), sempre com maior precisão. A única exceção é o Japão, onde o modelo ARIMA conseguiu um desempenho melhor. Desempenho este superior também nos países da América Latina.

O intervalo de confiança para o Reino Unido fez com que a característica reproduzida pelo o modelo ARIMA fosse rejeitada.

(d) Profundidade da Contração

Para o Canadá, Estados Unidos, Itália, Japão, Reino Unido e Brasil as RNA obtiveram um desempenho melhor, sendo que o nível de confiança do Canadá fez com que o resultado do modelo ARIMA fosse rejeitado.

(e) Duração da Contração

Para Alemanha, Canadá, França, Reino Unido e Brasil as RNA tem melhor desempenho, sendo que os valores encontrados para o Reino Unido estavam fora do intervalo de confiança.

(f) Numero de Ciclos

Para todos os países do G7 e para o Brasil, as Redes neurais tiveram um desempenho superior. No caso da França, as características obtidas pelos dois modelos foram rejeitadas.

5.2 POR PAÍSES

(a) Alemanha

O teste Q mostra que as redes neurais tem melhor performance, seja testando características separadamente ou todas em conjunto.

(b) Canadá

O modelo ARIMA tem um melhor desempenho nas características de expansão. Em compensação, as redes neurais tem um desempenho muito superior nas de contração, o que garante seu melhor desempenho quando utilizamos todas as características.

(c) Estados Unidos

Similar à Alemanha, as características das RNA apresentam performance sempre melhor. Este resultado é diferente do encontrado no trabalho de Hess e Iwata (1997) para série do PIB dos EUA (1949Q2: 1992Q4). Neste trabalho, os autores argumentam que o Modelo ARIMA é capaz de reproduzir características mais semelhantes às observadas nos dados.

(d) França

Os modelos considerados possuem a mesma capacidade de replicar as características de contração. Todavia, analisando o valor absoluto da estatística Q , as redes tem melhor desempenho. Em todas as outras características a rede também possui um melhor desempenho.

(e) Itália

Ambos os modelos apresentam desempenhos iguais em termos de replicar características de contração. Contudo, a análise do valor absoluto da estatística Q , mostra que as redes tem melhor desempenho. Em todas as outras características a rede possui um desempenho inferior, sendo que quando analisamos todas as características conjuntamente, o modelo ARIMA tem melhor desempenho.

(f) Japão

Semelhante a Itália, sendo que as redes tem um desempenho ligeiramente superior na contração e inferior em todos os outros. Quando analisadas todas as características, as duas classes apresentam desempenhos similares, com ligeira vantagem para o modelo ARIMA.

(g) Reino Unido

Em todas as características e também na combinação delas, as redes neurais conseguiram um desempenho melhor que o atingido pelos modelos ARIMA. É o país em que se encontram as maiores diferenças, o que reflete a dificuldade de utilização de um modelo linear para série do PIB deste país.

(h) Brasil

As redes conseguiram um desempenho melhor para as características de contração e expansão. Entretanto, agregando todas as características, o modelo ARIMA consegue um melhor desempenho.

(i) México

Neste caso as redes não conseguem obter um bom desempenho. Os modelos ARIMA são superiores em todas as características.

5.3 COMENTÁRIOS

Poucos resultados não estavam contidos no intervalo de confiança. Para o número de picos, o resultado gerado pelo modelo RNA para a Itália foi rejeitado. Em média, os modelos ARIMA aproximaram melhor esta característica em cinco países (Canadá, Estados Unidos, Itália, Reino Unido e México) só que com menor precisão quando comparados com os resultados dos países onde o modelo RNA obteve melhores resultados.

As redes aproximaram melhor as características de expansão dos países do G7, com exceção da duração da expansão do PIB japonês. Os modelos ARIMA conseguiram melhores resultados na América Latina, mas quase sempre com menor precisão. Todos os resultados das características de expansão obtidos por esta classe de modelos para a série do PIB real do Reino Unido, foram rejeitados.

A comparação dos resultados para as características de contração também indicam um melhor desempenho das redes. Os modelos ARIMA do Canadá e do Reino Unido, tiveram seus resultados rejeitados para as características de profundidade e duração respectivamente.

Na replicação do número de ciclos, apenas no México as redes não conseguiram melhores resultados. No caso da França, os resultados para as duas classes de modelos foram rejeitados pelo teste.

O teste Q mostra que para a Alemanha, Estados Unidos e Reino Unido as RNA obtiveram uma performance superior em todos os testes realizados. No caso dos Estados Unidos em especial, o resultado tem um grande significado, pois segundo Hess e Iwata (1997) a classe ARIMA obtém um melhor desempenho quando comparado com outras classes de modelos não lineares existentes na literatura. O trabalho de Candelon e Gil-Alana (2001) questiona este resultado quando compara a classe ARIMA com a classe de modelos ARFIMA. Galvão (2000) obtém um resultado favorável aos modelos não lineares só que com métricas de características de ciclo distintas das empregadas neste trabalho e empregadas por Hess e Iwata (1997).

As RNA também obtiveram um bom desempenho no Canadá, com exceção das características de expansão, que foram melhor replicadas pelo modelo ARIMA.

Os resultados obtidos para França e Japão não permitem nenhuma conclusão significativa. Analisando de forma absoluta, as redes obtiveram melhor desempenho em todos os testes para a França, e no de contração para o Japão, onde o modelo ARIMA levaria vantagem quando o resultado do teste conjunto de todas as características é considerado.

As características de contração geradas pelos dois modelos para a série do PIB da Itália também não possibilitam conclusões. Para os testes das demais características, o modelo ARIMA conseguiu um melhor desempenho.

Desta forma, com exceção da Itália, as redes neurais obtiveram um desempenho igual ou superior aos modelos ARIMA para os países do G7. Devemos levar em consideração que no caso da Itália, o modelo linear levava em consideração variáveis *dummies* para dois *outliers* encontrados na série. Quando desconsideradas as variáveis

dummies, o modelo ARIMA mostrou-se incapaz de reproduzir as características. As RNA, mesmo com um desempenho ruim foram capazes de reproduzir algumas características. Talvez, uma variação do espaço de parâmetros permita encontrar uma configuração da Rede capaz de reproduzir adequadamente todas as características do ciclo do país, sem a necessidade de informação adicional fornecida pelas *dummies*.

Para os países da América Latina, os resultados mostraram que as redes não obtêm um desempenho superior aos modelos ARIMA. Para o México, a classe ARIMA obteve um desempenho superior em todos os testes. Para a série do Brasil, o modelo de rede replicou melhor as características de expansão e contração, entretanto, quando agregadas todas as características, o modelo linear obtém uma performance superior.

6. CONCLUSÕES

Este trabalho comparou os modelos ARIMA e as RNA, procurando verificar qual desses modelos replica melhor importantes características do ciclo econômico. As duas classes de modelos foram comparadas em sua capacidade de reproduzir as características mensuradas a partir da série do PIB real de alguns países, de acordo com a métrica proposta no estudo de Hess e Iwata (1997). Diferentemente de estudos anteriores (Hesse e Iwata, 1997; Galvão 2000) este estudo utilizou as séries de PIB real dos países do G7 e de dois países da América Latina (Brasil e México), estimando modelos das duas classes para cada país.

Os resultados obtidos corroboram os estudos anteriores, mostrando que os modelos ARIMA em grande parte dos casos reproduzem satisfatoriamente as características do ciclo econômico. Entretanto, a classe das RNA, nunca testada pela literatura neste tipo de estudo (pelo menos até onde os autores tem conhecimento), reproduz mais fidedignamente estas características, principalmente no caso dos países integrantes do grupo do G7, o que

pode indicar a presença de alguma não linearidade relevante para a análise de ciclos econômicos destas séries.

De fato, este resultado para os países do G7 pode refletir a estabilização crescente do ciclo de negócios nesses países, envolvendo quebras estruturais na volatilidade, conforme discutido em Stock e Watson(2002). Com efeito, nos países do G7 as mudanças tecnológicas e o aperfeiçoamento de políticas de estabilização macroeconômicas podem ter induzido não linearidades bastante relevantes para a descrição da dinâmica da série de PIB real, como por exemplo quebras estruturais na volatilidade da série.

No caso dos países da América Latina, as RNA não obtiveram um desempenho tão satisfatório como no caso dos países do G7. A classe ARIMA obteve resultados superiores, principalmente para o México, desde que a sazonalidade presente na série seja filtrada através do uso de variáveis *dummies*.

Com respeito ao tratamento dado à sazonalidade, vale notar que procuramos a especificação mais simples possível , o que implica na modelagem de um padrão sazonal determinístico como ponto de partida, acrescentando termos AR e MA de ordem elevada, se necessário, no intuito de capturar padrões sazonais mais complexos(caso da França, Reino Unido, Brasil e México).

Para Brasil e México, todavia, o estudo mostra que o mais importante são choques e sazonalidade, não havendo ainda nenhum tipo de mudança estrutural importante que demande uma modelagem explicitamente não-linear. Evidentemente, esta é apenas uma dentre possíveis interpretações para os resultados aqui relatados.

O trabalho é relevante por comparar uma classe que tem obtido bons resultados na literatura (os modelos ARIMA), com uma classe de modelos flexíveis (RNA) ainda pouco explorada nos estudos sobre ciclos econômicos, mostrando que esta classe de modelos flexíveis é capaz de obter um desempenho superior na maioria dos países considerados.

Em suma, apesar do bom desempenho da família ARIMA, este artigo mostra que a modelagem do PIB real via RNA pode ser vantajosa na medida em que importantes características do ciclo econômico são descritas mais acuradamente por este tipo de modelo.

REFERÊNCIAS

Box, G. E. P. and Jenkins F. M. (1976). "Time Series Analysis: Forecasting and Control. Oakland,CA: Holden-Day, 2nd ed.

Burns A. e Mitchell. W. (1947). "Measuring Business Cycles." *New York National Bureau of Economic Research*.

Candelon, B. e Gil-Alana, L.A. (2001). "Fractional Integration and Business Cycle Features". *Mimeo*.

Cybenko, G. (1989). "Approximation by superposition of a Sigmoidal function." *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2, 303-314.

Demuth, H. e Beale,M. (1993). "Neural Network Toolbox for use with MATLAB". *The Mathworks Inc*.

Diebold, F. e Rudebush, G. (1996). "Measuring Business Cycles: A Modern Perspective. *The Review of Economics & Statistics*, vol. 78, issue 1, p. 67-77.

Enders, W. (1995) *Applied Econometric Time Series*. Wiley.

Foresee, F.D. and Hagan, M.T. (1997). "Gauss-Newton Approximation to Bayesian Regularization". *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 3, 1930-1935.

Galvão, Ana Beatriz (2000). "Univariate Non-Linear Time Series Models and the Business Cycles Stylized Facts". *Royal Econometric Society Conference*, UK.

Haykin, S. (1994). "Neural Networks: A comprehensive foundation". *Macmillian Co.*, New York.

Hess, G. D. e Iwata, S. (1997). "Measuring and comparing business-cycle features." *Journal of Business and Economic Statistics* 15, 432-444.

Hopfield, J.J (1982). "Neural Networks and physical systems with emergent collective computational abilities". *Proceeding of the national academy of sciences*, USA, 81, 2554-2558.

Kuan, C.M. e White, H. (1994). "Artificial neural networks: An econometric perspective" *Econometric Reviews*, 13, 1-91.

Lucas, Robert. (1977). "Understanding Business Cycles." Em Karl Brunner e Alan Meltzer, eds., *Stabilization of the Domestic and International Economy*. Amsterdam: North Holland.

Mackay, D.J.C. (1992). "Bayesian Methods for adaptive Models". Ph.D. Dissertation, *California Institute of Technology*.

Medeiros, M. C. e Teräsvirta, T. (2001). "Statistical Methods for Modeling Neural Networks." *Engineering Intelligent Systems*, 9, 227-235.

Medeiros, M. C. e Pedreira, C. E. (2001). "What are the effects of forecasting linear time series with neural networks?" *Engineering Intelligent Systems*, 9, 237-242.

Nelson, C. R e Plosser, C. I. (1982). "Trends and random walks in macro-economic time series: Some evidence and implications." *Journal of Monetary Economics* 10, 139-162.

Sarle, W. (1994). "Neural Networks and Statistical Models". *Proceedings of the Nineteenth Annual SAS Users Group International Conference*, USA.

Soni, T. Otruba, H. Haefke, C. Natter, M. (1995). "Can neural networks capture stylized facts in macroeconomic time series?". *Eastern Economic Annual Meeting*.

Stock, J.H. and Watson, Mark (2002). "Has the Business Cycle changed and why?" *NBER Macroeconomics Annual*.

Swanson, N. R. e White, H. (1997). "A Model Selection Approach to Real-Time Macroeconomic Forecasting Using Linear Models and Artificial Neural Networks". *Review of Economics and Statistics* 79, pp. 540-50.

Tkacz, G. e Hu, S. (1999). "Forecasting PIB growth using artificial neural networks." *Working paper at Bank of Canada*.

Vapnik, Vladimir (1999). "An Overview of Statistical Learning Theory". *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 10, 988-999.

Warner, B. e Misra, M. (1996). "Understanding neural networks as statistical tools". *The American Statistician*, 50, 284-293.

White, H. (1992). "Artificial Neural Networks: Approximation and learning Theory", Oxford, UK: *Blackwell*.

White, H. e Racine, J. (2001). "Statistical Inference, The Bootstrap, and Neural Network Modeling with Application to Foreign Exchange Rates". *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 12, 1-19.

ANEXO I

Especificação dos Modelos ARIMA

Variáveis		Coefficientes	Desv.Pad.	Estatística-t	p-valor
<i>Alemanha</i>					
C		0.006805	0.001502	4.531612	0.0000
AR(1)		-0.079745	0.073914	-1.078892	0.2822
AR(2)		0.048627	0.074184	0.655492	0.5131
AR(3)		-0.012126	0.073362	-0.165283	0.8689
AR(4)		0.344182	0.073115	4.707439	0.0000
<i>Canada</i>					
C		0.009262	0.001110	8.345968	0.0000
AR(1)		0.222574	0.074071	3.004874	0.0030
AR(2)		0.043751	0.075775	0.577376	0.5644
AR(3)		0.120692	0.073815	1.635076	0.1038
<i>Estados Unidos</i>					
C		0.008692	0.001189	7.307212	0.0000
AR(1)		0.346052	0.070393	4.916003	0.0000
<i>França</i>					
C		0.004736	0.001158	4.088542	0.0001
AR(1)		-0.426027	0.130633	-3.261251	0.0016
AR(2)		0.336370	0.106053	3.171723	0.0021
AR(3)		0.391138	0.096878	4.037409	0.0001
MA(1)		0.700628	0.105341	6.651017	0.0000
MA(9)		0.260267	0.093281	2.790153	0.0064
<i>Itália</i>					
C		0.007501	0.001134	6.612102	0.0000
DP1	(1)	0.390110	0.007729	5.047427	0.0000
DP2	(2)	0.063803	0.007447	8.567254	0.0000
AR(1)		0.437285	0.080500	5.432084	0.0000
AR(2)		0.160917	0.084780	1.898052	0.0595
AR(3)		-0.162837	0.078417	-2.076543	0.0394
<i>Japão</i>					
C		0.010282	0.001261	8.156645	0.0000
DP	(3)	-0.007520	0.001717	-4.437952	0.0000
AR(1)		-0.080996	0.107589	-0.752825	0.4537
AR(2)		-0.158110	0.106302	-1.148736	0.1407
AR(3)		0.187590	0.107295	1.748351	0.0841
<i>Reino Unido</i>					
C		0.006039	0.000597	1.011180	0.0000
AR(1)		-0.380046	0.170674	-2.226734	0.0274
AR(3)		0.197908	0.070206	2.818975	0.0054
AR(8)		-0.197868	0.069296	-2.855391	0.0049
AR(12)		-0.166532	0.065644	-2.536899	0.0121
AR(16)		-0.135255	0.066119	-2.045615	0.0424
MA(1)		0.384369	0.184420	2.084205	0.0387

Variáveis		Coeficientes	Desv.Pad.	Estatística-t	p-valor
⁽³⁾					
<i>Brasil</i>					
D1	⁽⁴⁾	-0.031865	0.009290	-3.430190	0.0010
D2	⁽⁴⁾	0.063807	0.009080	7.026982	0.0000
D3	⁽⁴⁾	0.020662	0.009104	2.269639	0.0263
D4	⁽⁴⁾	-0.026149	0.009065	-2.884682	0.0052
AR(1)		-0.132299	0.108055	-1.224367	0.2249
AR(2)		-0.352805	0.107054	-3.295585	0.0015
AR(6)		0.204468	0.108153	1.890534	0.0628
AR(8)		0.281672	0.109656	2.568692	0.0123
<i>México</i>					
D1	⁽⁴⁾	-0.024917	0.006011	-4.145323	0.0001
D2	⁽⁴⁾	0.026770	0.005997	4.463674	0.0000
D3	⁽⁴⁾	-0.041737	0.006005	-6.950446	0.0000
D4	⁽⁴⁾	0.062216	0.006013	10.34762	0.0000
AR(1)		-0.075418	0.111069	-0.679025	0.4992
AR(2)		0.183939	0.110736	1.661064	0.1009
AR(3)		-0.285554	0.110284	-2.589274	0.0115
AR(4)		0.187335	0.112692	1.662359	0.1006
AR(6)		-0.234414	0.112227	-2.088749	0.0401

$$^{(1)} DP1 = \begin{cases} 1, & t1 = 1970Q1 \\ 0, & \forall t \neq t1 \end{cases}$$

$$^{(2)} DP2 = \begin{cases} 1, & t2 = 1966 Q1 \\ 0, & \forall t \neq t2 \end{cases}$$

$$^{(3)} DP = \begin{cases} 1, & 1991Q1 \leq t \leq 2002Q3 \\ 0, & 1980Q1 \leq t \leq 1990Q4 \end{cases}$$

⁽⁴⁾ Variáveis dummies sazonais

ANEXO II

Especificação dos Modelos RNA

Matrizes e Vetores correspondem às Conexões da Rede

Matriz γ : Conexões na Camada Oculta

Vetor α : Conexões na Camada de Saída

Alemanha

$$\gamma = \begin{bmatrix} -0.4684 & -0.0048 & 0.2826 & 0.6642 \\ -0.6175 & -0.0438 & 0.3170 & 0.8531 \\ 0.0447 & -0.0886 & -0.1671 & -0.1475 \\ 0.0447 & -0.0886 & -0.1671 & -0.1475 \\ 1.4429 & 0.1400 & -0.3882 & -0.4589 \\ -0.1249 & 0.0785 & 0.1992 & 0.2318 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [1.3411 \quad 1.4999 \quad -0.8057 \quad -0.8057 \quad 3.4643 \quad 1.0281]$$

Canadá

$$\gamma = \begin{bmatrix} -0.1729 & 0.2146 & 0.3803 & -0.0117 \\ 0.2934 & -0.2266 & -0.4745 & 0.0322 \\ 0.5275 & 1.2642 & 0.2751 & -0.7509 \\ -0.1729 & 0.2146 & 0.3803 & -0.0117 \\ 1.9211 & -0.7681 & -0.3614 & 0.0575 \\ 0.2937 & -0.2266 & -0.4747 & -0.0323 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [0.8448 \quad -1.0189 \quad 2.3706 \quad 0.8448 \quad 3.6021 \quad -1.0191]$$

Estados Unidos

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0.6731 & -0.1825 & -0.4546 & 0.4088 \\ 0.5841 & -0.2901 & -0.3045 & -0.2820 \\ -0.3134 & 0.0779 & 0.1413 & -0.1398 \\ 0.3016 & 0.2663 & 0.3931 & -0.4823 \\ 0.5841 & -0.2901 & -0.3045 & 0.2820 \\ -0.3154 & 0.0794 & 0.1426 & -0.1409 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [2.9535 \quad 2.7412 \quad -1.2417 \quad 4.7361 \quad 2.7413 \quad -1.2482]$$

França

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0.0383 & -0.0007 & -0.0790 & -0.2639 \\ 0.0310 & -0.0051 & -0.0783 & -0.2513 \\ 0.0274 & -0.0072 & 0.0779 & -0.2451 \\ -0.3923 & -0.1779 & 0.1264 & 0.8580 \\ -0.5447 & -0.2257 & 0.1572 & 1.0857 \\ 1.7494 & 0.2257 & -0.3248 & -0.9997 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [-0.5289 \quad -0.5090 \quad -0.4994 \quad 2.0762 \quad 2.4722 \quad 3.7882]$$

Italia

$$\gamma = \begin{bmatrix} 2.2523 & -0.3051 & -1.4877 & -0.0473 & 0.2182 & 0.0442 \\ 0.1186 & 0.0991 & 0.0552 & 0.0104 & 0.0789 & 0.0155 \\ 1.5683 & -1.1855 & -0.9583 & -0.1204 & -0.0968 & -0.0234 \\ 0.1186 & 0.0991 & 0.0552 & 0.0104 & 0.0789 & 0.0155 \\ 0.5889 & -0.4587 & 0.4855 & 0.0629 & 0.3050 & 0.0463 \\ 0.1186 & 0.0991 & 0.0552 & 0.0104 & 0.0789 & 0.0155 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [2.4634 \quad 0.8276 \quad -1.9793 \quad 0.8276 \quad 3.3492 \quad 0.8276]$$

Japão

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0.3622 & -0.0203 & 0.1599 & -0.0328 \\ 0.3636 & -0.0207 & 0.1601 & -0.0333 \\ -0.7756 & 0.0768 & -0.1717 & 0.1992 \\ 0.3626 & -0.0204 & 0.1599 & -0.0329 \\ 0.3621 & -0.0203 & 0.1599 & -0.0327 \\ 0.5199 & -0.0555 & 0.1731 & -0.0952 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [1.3231 \quad 1.3272 \quad -2.5042 \quad 1.3242 \quad 1.3229 \quad 1.7583]$$

Reino Unido

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0.0221 & 0.2661 & 0.0894 & 0.0006 \\ -0.0209 & -0.2838 & -0.0926 & 0.0107 \\ 0.0221 & 0.2661 & 0.0894 & 0.0006 \\ 0.0221 & 0.2661 & 0.0894 & 0.0006 \\ 1.2523 & -0.3560 & -0.0256 & -0.2519 \\ 0.0221 & 0.2661 & 0.0894 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [1.2848 \quad -1.4238 \quad 1.2848 \quad 1.2848 \quad 3.3372 \quad 1.2849]$$

Brasil

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0.1532 & -0.0075 & 0.4851 & -0.2167 \\ 1.5559 & -2.0787 & -1.0199 & 2.1775 \\ 0.1532 & -0.0076 & 0.4854 & -0.2169 \\ 0.7647 & -1.7219 & -1.2698 & 1.5935 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [1.6011 \quad 3.5027 \quad 1.6015 \quad -3.0195]$$

Mexico

$$\gamma = \begin{bmatrix} -0.1260 & 0.2458 & 0.2789 & -0.1623 & 0.0940 & -0.0869 & -0.3118 & -0.3093 \\ -0.1180 & 0.2320 & 0.2646 & -0.1590 & 0.0799 & -0.0854 & -0.2931 & -0.2951 \\ 0.7695 & -0.7545 & -0.2117 & -0.4345 & -0.6997 & -0.1594 & 1.3580 & 0.6936 \\ 1.0054 & 2.0901 & 1.0146 & 0.1164 & -1.6248 & -0.5265 & -0.6260 & -1.4157 \\ -0.3453 & 0.2244 & -0.8168 & 1.5078 & 1.1026 & 0.2345 & -1.2624 & -0.0203 \\ 0.1165 & -0.2286 & -0.2607 & 0.1575 & -0.0773 & 0.0849 & 0.2893 & 0.2918 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [-1.4515 \quad -1.4028 \quad 2.8124 \quad 2.2166 \quad 2.8069 \quad 1.3832]$$